ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ ΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΚΑΙ ΕΠΑ.Λ. ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΔΕΥΤΕΡΑ, 25 ΜΑΙΟΥ 2015

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία απόδειξη θεωρήματος στη σελίδα 194 του σχολικού βιβλίου.

Α2. Θεωρία, ορισμός στη σελίδα 188 του σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία, ορισμός στη σελίδα 259 του σχολικού βιβλίου.

Α4.

α. Λάθος.

β. Σωστό.

γ. Λάθος.

δ. Σωστό.

ε. Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε διαδοχικά:

$$|z-4| = 2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2 = 4|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4)(\overline{z}-4) = 4(z-1)(\overline{z}-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z} - 4z - 4\overline{z} + 16 = 4z\overline{z} - 4z - 4\overline{z} + 4 \Leftrightarrow 3z\overline{z} = 12 \Leftrightarrow z\overline{z} = 4 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow |z| = 2$$

Β2. α. Αφού οι μιγαδικοί z_1, z_2 ικανοποιούν το ερώτημα Β1 θα είναι:

$$|z_1| = 2 \Leftrightarrow z_1\overline{z_1} = 2 \Leftrightarrow \overline{z_1} = \frac{2}{z_1}$$

$$|z_2| = 2 \Leftrightarrow z_2\overline{z_2} = 2 \Leftrightarrow \overline{z_2} = \frac{2}{z_2}$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\overline{w} = \frac{2\overline{z_1}}{\overline{z_2}} + \frac{2\overline{z_2}}{\overline{z_1}} = \frac{2\frac{2}{z_1}}{\frac{2}{z_2}} = \frac{4z_2}{2z_1} + \frac{4z_1}{2z_1} = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = w$$

Άρα $\overline{w} = w$ και επομένως ο w είναι πραγματικός αριθμός.

β. Έχουμε διαδοχικά:

$$|w| = \left|\frac{2\left(z_1^{\ 2} + z_2^{\ 2}\right)}{z_1 z_2}\right| = 2\left|\frac{z_1^{\ 2} + z_2^{\ 2}}{z_1 z_2}\right| = 2\frac{\left|z_1^{\ 2} + z_2^{\ 2}\right|}{|z_1 z_2|} = \frac{2}{4}\left|z_1^{\ 2} + z_2^{\ 2}\right| \leq \frac{1}{2}\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right) \leq \frac{1}{2}(4+4) = 4$$

Επομένως:

$$|w| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq w \leq 4$$

B3. Για τη σχέση των z_1, z_2 έχουμε:

$$w = -4 \Leftrightarrow \frac{2\left(z_1^{\ 2} + z_2^{\ 2}\right)}{z_1 z_2} = -4 \Leftrightarrow \frac{z_1^{\ 2} + z_2^{\ 2}}{z_1 z_2} = -2 \Leftrightarrow z_1^{\ 2} + z_2^{\ 2} = -2z_1 z_2 \Leftrightarrow \left(z_1 + z_2\right)^2 = 0 \Leftrightarrow z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow z_1 = -z_2$$

Για το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε:

$$(\text{ΑΓ}) = |z_1 - z_3| = |z_1 - 2iz_1| = |z_1(1-2i)| = |z_1||1-2i| = 2\sqrt{5}$$
$$(\text{ΒΓ}) = |z_2 - z_3| = |-z_1 - 2iz_1| = |-z_1(1+2i)| = |z_1||1-2i| = 2\sqrt{5}$$

Επομένως το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές, αφού (ΑΓ)=(ΒΓ).

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$f'(x) = \frac{e^x (x-1)^2}{x^2+1}, x \in \mathbb{R}$$

Είναι $f'(x) > 0, x \in (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ και επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 1]$ και στο $[1, +\infty)$ δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Τ σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to\infty} f(x)\right)$ αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι το διάστημα $(0, \infty)$.

Γ2. Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο στο $\mathbb{R}$ θα έχουμε διαδοχικά:

$$f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right)=\frac{e^2}{5}\Leftrightarrow f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right)=f\left(2\right)\Leftrightarrow e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)=2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{e^3}{e^x}\cdot\left(x^2+1\right)=2\Leftrightarrow\frac{e^x}{x^2+1}=\frac{e^3}{2}\Leftrightarrow f(x)=\frac{e^3}{2}$$

Όμως $\frac{e^3}{2}\in(0,\infty)$, δηλαδή ο αριθμός $\frac{e^3}{2}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης f και επομένως, σύμφωνα με το Θ.Ε.Τ. υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\mathbb{R}: f(\xi)=\frac{e^3}{2}$. Το ξ αυτό είναι μοναδικό αφού η συνάρτηση f είναι είναι «1-1» (ως γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$).

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $H(u)=\int_0^u f(t)dt,\ u\in[2x,4x]$ και εφαρμοζουμε το Θ.Μ.Τ του διαφορικού λογισμού .

Η $H(u)$ είναι συνεχής στο $[2x,4x], x>0$ (ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αφού η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$).

Η $H(u)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(2x,4x)$ με $H'(u)=f(u),\ u\in(2x,4x)$

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(2x,4x)$ τέτοιο, ώστε:

$$H'(\xi)=\frac{H(4x)-H(2x)}{4x-2x}\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{\int_0^{4x}f(t)dt-\int_0^{2x}f(t)dt}{2x}\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{\int_{2x}^{0}f(t)dt+\int_0^{4x}f(t)dt}{2x}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(\xi)=\frac{\int_{2x}^{4x}f(t)dt}{2x}$$

Ακόμα έχουμε $H''(x)=f'(x)>0, x\in\mathbb{R}$ και άρα η συνάρτηση $H'(u)=f(u)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα $(2x,4x)$.

Τώρα έχουμε διαδοχικά για κάθε $x>0$:

$$2x<\xi<4x\Rightarrow H'(2x)<H'(\xi)<H'(4x)\Rightarrow f(2x)<\frac{\int_{2x}^{4x}f(t)dt}{2x}<f(4x)\Rightarrow\frac{\int_{2x}^{4x}f(t)dt}{2x}<f(4x)\Rightarrow$$
$$\int_{2x}^{4x}f(t)dt<2xf\left(4x\right)$$

Γ4. Η συνάρτηση g είναι συνεχής για $x>0$ (ως γινόμενο και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων).

Αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι συνεχής και στο $x_0=0$.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{\int_{2x}^{4x}f(t)dt}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{4f(4x)-2f(2x)}{1}=4f(0)-2f(0)=2f(0)=2=g(0)$

αφού $(f(0)=1)$.

Για κάθε $x>0$ η g είναι παραγωγίσιμη με

$$g'(x)=-\frac{1}{x^2}\int_{2x}^{4x}f(t)dt+\frac{1}{x}\left[\int_{2x}^{4x}f(t)dt\right]'=-\frac{1}{x^2}\int_{2x}^{4x}f(t)dt+\frac{1}{x}\left[4f(4x)-2f(2x)\right]=$$

$$=\frac{-\int_{2x}^{4x}f(t)dt+4xf(4x)-2xf(2x)}{x^2}>\frac{-2xf\left(4x\right)+4xf(4x)-2xf(2x)}{x^2}=\frac{2x\left[f(4x)-f(2x)\right]}{x^2}=$$

$$=\frac{2\left[f(4x)-f(2x)\right]}{x},x>0$$

Όμως για κάθε $x>0$ είναι $4x>2x$ και αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ θα είναι:

$$4x>2x\Rightarrow f(4x)>f(2x)\Rightarrow f(4x)-f(2x)>0$$

Επομένως $g'(x)>0$, για κάθε $x>0$ και άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,+\infty\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έχουμε διαδοχικά:

$$f'(x)\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2\Leftrightarrow f'(x)e^{f(x)}+f'(x)e^{-f(x)}=2\Leftrightarrow\left[\left(e^{f(x)}\right)'-\left(e^{-f(x)}\right)'\right]=2$$

$$\Leftrightarrow\left[e^{f(x)}-e^{-f(x)}\right]'=\left(2x\right)'$$

Άρα $e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x+c$, όπου c μία σταθερά. Είναι $x=0\Rightarrow e^0-e^0=0+c\Rightarrow c=0$ και άρα:

$$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x\Leftrightarrow e^{f(x)}-\frac{1}{e^{f(x)}}=2x\Leftrightarrow e^{f(x)}-2xe^{f(x)}=1\Leftrightarrow e^{f(x)}-2xe^{f(x)}+x^2=1+x^2\Leftrightarrow\left[e^{f(x)}-x\right]^2=1+x^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left|e^{f(x)}-x\right|=\sqrt{1+x^2}\,(1)$$

Θέτοντας $\varphi(x)=e^{f(x)}-x,x\in\mathbb{R}$ έχουμε ότι η $\varphi(x)\neq0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, γιατί αν υπήρχε ένα τουλάχιστον $x_1\in\mathbb{R}$ με $\varphi(x_1)=0\Leftrightarrow\left|e^{f(x_1)}-x\right|=0\Leftrightarrow1+x_1{}^2=0(άτοπο)$. Επομένως η συνάρτηση $\varphi(x)$ διατηρεί σταθερό πρόσημο και επειδή $\varphi(0)=e^{f(0)}-0=1>0$ θα έχουμε $\varphi(x)>0,x>0$.

Άρα η σχέση (1) γίνεται $e^{f(x)}-x=\sqrt{1+x^2}$.

Τώρα έχουμε διαδοχικά:

$$e^{f(x)}-x=\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow e^{f(x)}=x+\sqrt{1+x^2}\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right),x\in\mathbb{R}$$

Δ2. α) Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}},x\in\mathbb{R}$. Ακόμα η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με :

$$f''(x)=-\frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot2x}{1+x^2}=-\frac{x}{\left(1+x^2\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}$$

Έχουμε:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x=0$$

$$x>0 \Leftrightarrow -\frac{x}{\left(1+x^2\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}<0 \Leftrightarrow f''(x)<0$$

$$x<0 \Leftrightarrow -\frac{x}{\left(1+x^2\right)\cdot\sqrt{x^2+1}}>0 \Leftrightarrow f''(x)>0$$

Επομένως:

Η συνάρτηση f στέφει τα κοίλα κάτω στο διάστημα $[0,+\infty)$

Η συνάρτηση f στέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $(-\infty,0]$

Η συνάρτηση f έχει σημείο καμπής το $A\left(0,f(0)\right)$, δηλαδή το $A\left(0,0\right)$.

β) Το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E\left(\Omega\right)=\int_0^1\left|f(x)-x\right|dx$ (Ι). Θα διερευνήσουμε το πρόσημο της $f(x)-x, x\in\left(0,1\right)$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,0)$ είναι:

$y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=x$ και επειδή η f στέφει τα κοίλα κάτω στο $\left(0,1\right)\subset\left(0,+\infty\right)$ θα είναι $f(x)\le x, x\in\left(0,1\right)$ ή $f(x)-x\le 0, x\in\left(0,1\right)$ και άρα η σχεση (Ι) δίνει:

$$E\left(\Omega\right)=\int_0^1\left|f(x)-x\right|dx=\int_0^1\left[x-f(x)\right]dx=\int_0^1\left[x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]dx=\int_0^1 x\,dx-\int_0^1\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=$$

$$=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\left[x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^1+\int_0^1 x\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}}\cdot 2x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\int_0^1 x\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\int_0^1\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx=$$

$$=\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1=\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}-1=-\frac{1}{2}+\sqrt{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)\tau.\mu$$

Δ3. Έχουμε:

$$A=\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ln|f(x)|\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\left(\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}}{x}\right)\cdot\left(x\ln|f(x)|\right)\right](II)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)}{1}=e^0\cdot f^2(0)=0$$

$$B=\lim_{x\to 0^+}\left(x\ln|f(x)|\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(x\ln f(x)\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\ln f(x)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2 f'(x)}{f(x)}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{f(x)}=-\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{x^2}{f(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right](III)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{f(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{f'(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}=\lim_{x\to 0^+}\left[2x\sqrt{x^2+1}\right]=0$$

$$B=-\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{f(x)}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=0\cdot 1=0$$

$$A=0\cdot 0=0$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το $\int_0^x f^2(t)dt$ είναι συνεχής συνάρτηση, αφού και η f, άρα και η f^2, είναι συνεχείς συναρτήσεις (Όταν χρειάστηκε παραπάνω χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα του De΄Hospital όπου είχαμε απροσδιοριστία $\frac{0}{0}$ και $\frac{\infty}{\infty}$).

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$K(x)=(x-2)\left[1-\int_0^{x-2}f(t)dt\right]+\left(x-3\left[8-\int_0^x f(t)dt\right]\right),x\in[2,3]$$

Και εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bolzano στο διάστημα $[2,3]$.

Έχουμε:

- Η συνάρτηση $K(x)$ είναι συνεχής στο διάστημα $[2,3]$(ως γινόμενο, σύνθεση και άθροισμα συνεχών συναρτήσεων).
- $K(2)=-8+3\int_0^2 f^2(t)dt$
  $K(3)=1-3\int_0^1 f(t^2)dt$

Επειδή: $\begin{matrix} f(x) \le x, x \in (0,+\infty) \\ f(t) \le t, t \in [0,2] \end{matrix}$ θα είναι διαδοχικά:

$$f(t) \le t \Rightarrow f^2(t) \le t^2 \Rightarrow f^2(t) - t^2 < 0 \Rightarrow \int_0^2 \left(f^2(t) - t^2 \right) dt < 0 \Rightarrow \int_0^2 f^2(t)dt < \int_0^2 t^2 dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^2 f^2(t)dt < \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^2 \Rightarrow \int_0^2 f^2(t)dt < \frac{8}{3} \Rightarrow 3\int_0^2 f^2(t)dt < 8 \Rightarrow K(2) < 0$$

(η συνάρτηση $f(t^2) - t^2$ είναι συνεχής και δεν είναι παντού μηδέν στο $[0,2]$)

Ακόμα:

$$f(t^2) \le t^2 \Rightarrow f(t^2) - t^2 \le 0, t \in [0,1]$$

$$\int_0^1 \left[f(t^2) - t^2 \right] dt < 0 \Rightarrow \int_0^1 f(t^2)dt < \int_0^1 t^2 dt \Rightarrow \int_0^1 f(t^2)dt < \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f(t^2)dt < \frac{1}{3} \Rightarrow 1 - \int_0^1 f(t^2)dt \Rightarrow K(3) > 0$$

(Η συνάρτηση $f(t^2) - t^2$ είναι συνεχής και δεν είναι παντού μηδέν στο $[0,1]$)

Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2,3)$, ώστε:

$$K(\xi) = 0 \Leftrightarrow (\xi - 2)\left[1 - 3\int_0^{\xi-2} f(t^2)dt \right] + (\xi - 3)\left(\left[8 - 3\int_0^{\xi} f^2(t)dt \right] \right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{1 - 3\int_0^{\xi-2} f(t^2)dt}{\xi - 3} + \frac{8 - 3\int_0^{\xi} f^2(t)dt}{\xi - 2} = 0$$

Δηλαδή η δοθείσα εξίσωση έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο διάστημα $(2,3)$.